A 2002 PSI 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PSI

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PSI.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étant donnée une fonction f réelle, définie sur le segment $[0,1]$, indéfiniment dérivable, soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par les relations suivantes :

(**U**) $u_0 = 1$; pour tout entier n strictement positif, $u_n = \prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\frac{1}{1}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) ... f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Soit R le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n\, x^n,\ n = 0, 1, 2, \dots$. Soit F la somme de cette série entière ; son ensemble de définition est l'ensemble des points en lesquels la série entière est convergente. Elle est définie par la relation suivante :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, x^n.$$

Première partie

I-1. **Rayon de convergence** :

a. Exemples : étant donnés un réel α différent de 0 ($\alpha \neq 0$) et un entier naturel p différent de 0 ($p \geq 1$), déterminer les rayons de convergence et les sommes $F_1,\ F_2$ et F_3 des séries entières de terme général $u_n\, x^n$, lorsque la fonction f est successivement définie par l'une des trois relations suivantes :

$$f_1(t) = \alpha\ ;\ f_2(t) = \alpha\, t\ ;\ f_3(t) = p\, t - 1.$$

Préciser les ensembles de définition des trois fonctions $F_1,\ F_2$ et F_3 ; pour déterminer la fonction F_3, exprimer le coefficient u_n pour $n \leq p-1$ au moyen du coefficient du binôme C_{p-1}^{n}

égal à $\begin{pmatrix} p-1 \\ n \end{pmatrix}$.

b. Déterminer, pour une fonction f réelle, définie sur le segment $[0,1]$, indéfiniment dérivable, le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n\, x^n$.

Dans la suite du problème, les fonctions indéfiniment dérivables f considérées prennent des valeurs différentes de 0 en tout point d'abscisse $1/n$ où n est un entier strictement positif (pour tout entier n strictement positif $f(1/n) \neq 0$).

I-2 Suite de terme général u_n :

a. Démontrer que, si la fonction f prend une valeur en 0 strictement positive ($f(0) > 0$), il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, le réel u_n soit de signe constant.

b. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans les deux cas suivants :

i. le réel $|f(0)|$ appartient à l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$ $(0 \leq |f(0)| < 1)$,

ii. le réel $|f(0)|$ est strictement supérieur à 1 ($|f(0)| > 1$).

Dans toute la suite du problème, la fonction f prend la valeur 1 en 0 ($f(0) = 1$) et des valeurs strictement positives sur le segment $[0,1]$.

I-3. **Série de terme général** u_n :

Soit β la valeur prise par la fonction dérivée f' en 0 :

$$\beta = f'(0).$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par les relations suivantes :

$$v_0 = 1\,;\ \text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 1 : } v_n = \frac{u_n}{n^\beta}.$$

Dans le cas particulier où β est nul : $v_n = u_n$.

Étudier la convergence de la série dont le terme général w_n, $n = 1,2,\ldots,$ est défini par la relation :

$$\text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 1 : } w_n = \ln \frac{v_n}{v_{n-1}}.$$

En déduire l'existence d'une constante L, différente de 0, telle que u_n soit équivalent à l'infini à $L\, n^\beta$.

$$u_n \sim L\, n^\beta.$$

I-4. **Fonction** F :

a. Soit f une fonction réelle, définie sur le segment $[0,1]$, strictement positive, indéfiniment dérivable, prenant la valeur 1 en 0 ; déterminer l'ensemble de définition D_F de la fonction F, c'est-à-dire l'ensemble des réels pour lesquels la série de terme général $u_n\, x^n$ est convergente ;

les coefficients u_n sont définis par la relation (**U**) de la première page.

b. Exemple : étant donné un réel α différent d'un entier naturel, soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par la relation suivante :

$$f(t) = 1 - \alpha\, t.$$

Soit F la fonction égale à la somme de la série entière de terme général $u_n\, x^n$; les coefficients u_n sont définis par la relation (**U**). Écrire l'expression de $F(x)$ comme somme d'une série entière ; préciser son rayon de convergence. Reconnaître la fonction F.

Deuxième partie

Soit α un réel strictement compris entre 0 et 1 $(0 < \alpha < 1)$; soit f la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par la relation suivante :

$$f(t) = 1 - \alpha^2\, t^2.$$

C'est un exemple de fonction f dont la dérivée est nulle en 0 $\big(f'(0) = 0\big)$. Soit g la fonction définie sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ par les relations suivantes :

$$g(0) = 0\ ;\ \text{pour tout } x \text{ vérifiant } 0 < |x| < 1,\ g(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\pi\, x}\ .$$

II-1. **Propriétés de la fonction** g :

a. Démontrer que la fonction g, définie par les relations ci-dessus, est continue sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$. Calculer pour tout réel α, appartenant à l'intervalle ouvert $\big]-1,\ 1\big[$, l'intégrale I_α définie par la relation ci-dessous :

$$I_\alpha = \int_0^\alpha g(t)\, dt.$$

b. Soit h la fonction complexe, périodique de période 2π, définie sur l'intervalle semi-ouvert $[0,2\pi[$ par la relation suivante :

$$\text{pour tout réel } t \text{ vérifiant les inégalités } 0 \le t < 2\pi,\ h(t) = e^{-i\,\alpha\, t}.$$

Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction h ; préciser la convergence de la série obtenue. En déduire la relation :

$$g(\alpha) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

c. En déduire une expression de l'intégrale I_α, considérée à l'alinéa a, au moyen de la somme d'une série.

II-2. **Convergence de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie à partir de la fonction *f* grâce aux relations (**U**) est convergente et déterminer sa limite.

Troisième partie

Le but de cette partie est d'utiliser les résultats de la deuxième partie pour établir des propriétés de la fonction G définie sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$ par la relation :

$$G(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = \int_{]0,\,\infty[} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Étant donné un entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), soit φ_n la fonction définie sur le quart de plan $]0,\infty[\times]0,\infty[$ par la relation suivante :

$$\varphi_n\big(x,\ t\big) = t^{x-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n, \text{ si } 0 < t \leq n\ ;\ \varphi_n\big(x,\ t\big) = 0, \text{ si } t \geq n.$$

Soit G_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$ par la relation suivante :

$$G_n(x) = \int_0^n \varphi_n\big(x,\ t\big)\ dt = \int_{]0,\,n]} \varphi_n\big(x,\ t\big)\ dt.$$

III-1. **Existence des fonctions** G_n **et** G :

Démontrer que les deux fonctions G_n et G sont définies et continues sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$. Démontrer que la suite des fonctions $G_n,\ n = 1,2,\ldots,$ converge simplement, sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$, vers la fonction G.

III-2. **Une expression de** $G_n(x)$:

a. Étant donnés un entier naturel n et un réel x strictement positif ($x > 0$), soit $J_n(x)$ l'intégrale définie par la relation suivante :

$$J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n\, t^{x-1}\ dt = \int_{]0,\,1]} (1-t)^n\, t^{x-1}\ dt.$$

Calculer cette intégrale.

b. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout réel x strictement positif, une expression de $G_n(x)$.

III-3. **Relation des compléments** :

Démontrer, pour tout réel x strictement compris entre 0 et 1 ($0 < x < 1$), la relation suivante :

$$G(x)\ G(1-x) = \frac{\pi}{\sin\big(\pi\, x\big)}.$$

FIN DU PROBLÈME