MATHÉMATIQUES II

Les deux premières parties de ce problème se proposent d'étudier deux types d'approximation d'une fonction sur un segment, et de les comparer. La troisième partie munit l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n d'une structure euclidienne et étudie certaines propriétés des polynômes interpolateurs de Lagrange relativement à cette structure. La troisième partie est indépendante des deux premières.

Partie I - Matrices tridiagonales

Notations : pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$A_n = M_n[2, 4, \ldots, 4, 2]$; $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 4, \ \alpha_n = 2)$

$B_n = M_n[2, 4, \ldots, 4]$; $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 4)$

$C_n = M_n[4, \ldots, 4]$; $(\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 4)$

I.A - Méthode du pivot

Dans cette section on pose

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}$$

et on se propose de résoudre le système $(\mathcal{S}_n)$ $A_{n+1}X = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, par la méthode du pivot de Gauss **sans échange de lignes**.

Filière PSI

I.A.1) Cas $n = 2$.

Résoudre par cette méthode le système $(\mathscr{S}_2)$.
On remarquera en particulier que les pivots successifs valent :

$$p_0 = 2 \ ; \ p_1 = \frac{7}{2} \ ; \ p_2 = \frac{12}{7} .$$

I.A.2) On revient au cas général.

a) Écrire une procédure de résolution du système

$$A_{n+1}X = B ,$$

suivant l'algorithme du pivot de Gauss sans échange de lignes.

b) On note $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ la suite des pivots. Vérifier que :

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ \forall k \in \{0, \ldots, n-2\}, \quad p_{k+1} = 4 - \dfrac{1}{p_k} \\ p_n = 2 - \dfrac{1}{p_{n-1}} \end{cases}$$

c) Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

d) En déduire que $(\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}) \quad (2 \le p_k \le 2 + \sqrt{3})$ et que A_{n+1} est inversible.

I.B - Calculs explicites

Notation : pour toute matrice M, on note $det\ M$ son déterminant.

I.B.1) On pose $c_0 = 1$, $c_1 = 4$, $c_2 = 15$ et pour tout $n \ge 3$, $c_n = det\ C_n$, $b_n = det\ B_n$, $a_n = det\ A_n$. Montrer que la suite $(c_n)_{n \ge 3}$ vérifie une relation de récurrence simple ; en déduire $(c_n)_{n \ge 3}$ puis $(b_n)_{n \ge 3}$ et $(a_n)_{n \ge 3}$.

I.B.2) En déduire que A_n est inversible.

I.B.3) Calculer explicitement les valeurs propres de A_3 et C_3.

I.B.4) **Localisation des valeurs propres**.

a) Soit λ un réel tel que :

$$|\lambda - \alpha_1| > 1$$

$$|\lambda - \alpha_n| > 1$$

et, $\forall k \in \{2, 3, \ldots n-1\}$ $\quad |\lambda - \alpha_k| > 2$.

Montrer qu'alors $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] - \lambda I$ est inversible.

b) En déduire que les valeurs propres de $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ appartiennent à la réunion des intervalles

$$[\alpha_1 - 1, \alpha_1 + 1] \cup \left(\bigcup_{k=2}^{n-1} [\alpha_k - 2, \alpha_k + 2] \right) \cup [\alpha_n - 1, \alpha_n + 1]$$

et que A_n , B_n et C_n sont inversibles.

Partie II - Fonctions splines cubiques

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $h = \dfrac{1}{n}$ et pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $x_k = \dfrac{k}{n}$.

On note S l'ensemble des fonctions (dites splines cubiques) de classe C^2 sur $[0, 1]$ telles que : $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$ la restriction de s à $[x_i, x_{i+1}]$ est polynomiale de degré ≤ 3 .

II.A - Montrer que l'application :

$$S \to \mathbb{R}^{n+3}$$

$$s \mapsto \left(s(0), s'(0), s''(0), s_d^{(3)}(0), s_d^{(3)}\left(\frac{1}{n}\right), \ s_d^{(3)}\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, s_d^{(3)}\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

On rappelle que, si $x \in \mathbb{R}$, $s_d^{(3)}(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{s''(x+t) - s''(x)}{t}$ désigne la dérivée à droite d'ordre 3 en x .

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel S ?

II.B - f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$.

II.B.1) Soit $(m_0, m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

a) Montrer qu'il existe une unique fonction g définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $\forall i \in \{1, \ldots n\}$ la restriction de g à $[x_{i-1}, x_i]$ est polynomiale de degré ≤ 3 ,

(ii) $\forall i \in \{0, \ldots n\}$ $g(x_i) = f(x_i)$,

(iii) $g''(0) = m_0$; $\lim\limits_{\begin{cases} x \to x_i \\ x \leq x_i \end{cases}} g''(x) = \lim\limits_{\begin{cases} x \to x_i \\ x \geq x_i \end{cases}} g''(x) = m_i$; $g''(1) = m_n$.

b) Établir que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $x \in [x_{i-1}, x_i]$ on a :

$$g(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + u_i(x - x_{i-1}) + v_i$$

où u_i et v_i sont des réels que l'on exprimera en fonction de m_{i-1}, m_i, h, $f(x_{i-1})$ et $f(x_i)$.

II.B.2) Montrer que :

$$\begin{cases} g \in S \\ g'(0) = f'(0) \\ g'(1) = f'(1) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A_{n+1}M = B,$$

où $M = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$, $A_{n+1} = M_{n+1}[2, 4, \ldots, 4, 2]$ selon les notations de la partie I, et B est une matrice colonne dépendant des $f(x_i), (i \in \{0, \ldots, n-1\})$, $f'(0)$, $f'(1)$ et h.

II.B.3) En déduire qu'il existe une et une seule fonction spline cubique $g \in S$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0, \ldots, n\}, g(x_i) = f(x_i) \\ g'(0) = f'(0) \; ; \; g'(1) = f'(1) \end{cases}.$$

II.B.4) Retrouver la valeur de la dimension de S.

On peut montrer et on **admettra** ici que si f est de classe C^4 sur $[0, 1]$,

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \le \frac{13}{8n^4}\|f^{(4)}\|_\infty$$

II.C - Interpolation de Lagrange-Sylvester

II.C.1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale h, de degré $\le n + 2$ telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0, \ldots, n\}, h(x_i) = f(x_i) \\ h'(0) = f'(0) \; ; \; h'(1) = f'(1) \end{cases}$$

II.C.2) On peut montrer, et on **admettra** ici que, si f est de classe C^{n+3} sur $[0, 1]$:

$$\|f-h\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+3)}\|_\infty}{(n+3)\,!}\|M_n\|_\infty \text{ où } M_n(x) = x(x-1)\prod_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right).$$

Comparer les deux méthodes d'approximation précédentes (splines cubiques et Lagrange-Sylvester) du double point de vue de la simplicité et de la précision, d'abord pour $n = 1$, puis pour $n \geq 2$.

Partie III - Un exemple de structure euclidienne

III.A - On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour P, $Q \in E$, on pose :

$$(P|Q) = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$$

III.A.1) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire euclidien sur E. On notera $\|P\|_2$ la norme du polynôme P associée au produit scalaire précédent.

III.A.2) Montrer qu'il existe une unique famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ de E telle que :

$$\forall (i, j) \in \{0, \ldots, n\}^2 \qquad L_i(j) = \delta_{i,j}$$

où la fonction δ désigne le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Vérifier que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de E. Elle sera notée $\mathcal{B}$. Que peut-on dire du degré du polynôme $X^n + (-1)^{n+1}n!\, L_0$?

III.A.3) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur N de E orthogonal (au sens du produit scalaire précédemment défini) à l'hyperplan H de E formé des polynômes de degré $\leq n-1$.

Si $P \in E$, on note

$$d(P, H) = \inf_{Q \in H} \|P - Q\|_2$$

la distance du polynôme P à l'hyperplan H.

Montrer que $d(X^n, H) = n!\ d(L_0, H)$.

III.A.4) En remarquant que : $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, exprimer

$$\sum_{p=0}^{n} (C_n^p)^2$$

à l'aide d'un seul coefficient binômial.

III.A.5) En déduire la valeur de $d(X^n, H)$.

III.B - Étude d'un endomorphisme de E

On note

$$\Pi(X) = \prod_{i=0}^{n} (X-i)$$

et on fixe un polynôme M_0 dans E.

On considère l'application φ de E dans E, qui à tout P de E associe le reste de la division euclidienne de $P \times M_0$ par Π.

III.B.1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

III.B.2) Exprimer $\varphi(L_i)$ en fonction de L_i. En déduire que φ est un endomorphisme autoadjoint de E.

III.B.3) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur M_0 pour que φ soit un automorphisme orthogonal de E. Quelle est alors sa nature géométrique ?

III.B.4) On note $\mathscr{B}_E(0,1) = \{P \in E \; ; \; \|P\|_2 \leq 1\}$.

Exprimer

$$\min_{P \in \mathscr{B}_{E(0,1)}} (\varphi(P)|P) \quad \text{et} \quad \max_{P \in \mathscr{B}_{E(0,1)}} (\varphi(P)|P)$$

à l'aide des $M_0(i)$.

••• FIN •••